MATURA
2012

Powtórka do matury z matematyki

Część IV: Funkcje
ROZWIĄZANIA

Organizatorzy: MatmaNa6.pl i Dziennik.pl

Witaj,

jest to czwarta z dziesięciu części materiałów powtórkowych do matury z matematyki. W każdy poniedziałek pod adresem http://dziennik.pl będą dostępne kolejne zadania maturalne do rozwiązania. W czwartki pod tym samym adresem znajdziesz rozwiązania poniedziałkowych zadań, abyś mógł zweryfikować swoje odpowiedzi. Dzisiejsza powtórka obejmuje zagadnienia z działu Funkcje.

Jeżeli, szukasz wzorów, definicji i innych materiałów wykorzystanych przy rozwiązaniu poniższych zadań to sprawdź na http://matmana6.pl/tablice_matematyczne

Powodzenia,

Redaktorzy portalu MatmaNa6.pl

Dziennikarze Dziennik.pl

Funkcje

Zadanie 1:

Miejscami zerowymi funkcji $f(x)=x^2+3x-4$ są:

$a)\ x=-1$ i $x=2$

$b)\ x=-3$ i $x=2$

$c)\ x=2$ i $x=4$

$d)\ x=-4$ i $x=1$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: d)

Aby obliczyć miejsca zerowe funkcji f, przyrównujemy jej wartości do zera.

$$x^2+3x-4=0$$

$$\Delta=3^2-4\cdot1\cdot(-4)=25$$

$$\sqrt{\Delta}=5$$

$$x_1=\frac{-3+5}{2}=1$$

$$x_2=\frac{-3-5}{2}=-4$$

Zadanie 2:

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x)=(4m+5)x-1$ jest malejąca?

$a)\ m>\frac{4}{5}$

$b)\ m<\frac{-5}{4}$

$c)\ m>0$

$d)\ m\geq\frac{-5}{4}$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

$$4m+5<0$$
$$m<\frac{-5}{4}$$

Zadanie 3:

Dziedziną funkcji $y=3^{|x-3|}-3$ jest:

$a)\ [-3,+\infty)$
$b)\ \mathbb{R}$

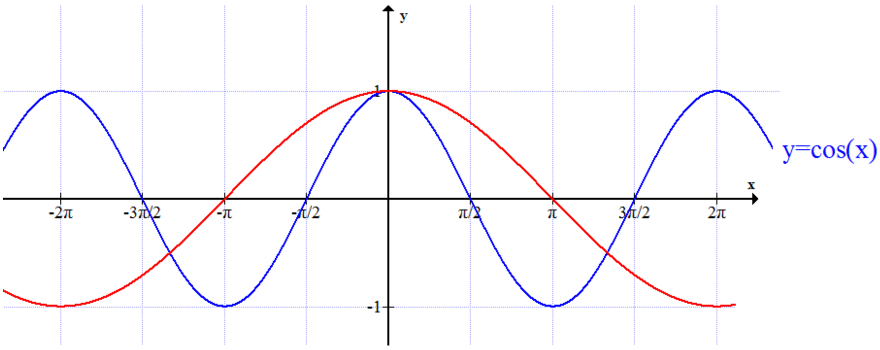
$c)\ \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$d)\ [0,+\infty)$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

Zadanie 4:



Funkcja zaznaczona na powyższym wykresie czerwonym kolorem jest określona wzorem:

$a)\ y=2\cos x$

$b)\ y=\frac{1}{2}\cos x$

$c)\ \cos(2x)$

$d)\ \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: d)

Zadanie 5:

Określ dla jakich argumentów funkcja $y=-4x+3$ przyjmuje wartości dodatnie.

Rozwiązanie:

$$-4x+3>0$$
$$-4x>-3$$
$$x<\frac{3}{4}$$

Zadanie 6:

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $[-4,+\infty)$, a zbiorem rozwiązań nierówności $f(x)\geq 0$ jest przedział $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. Wyznacz wzór funkcji f .

Rozwiązanie:

Funkcja posiada minimum o watości $q=-4$. Miejscami zerowymi funkncji są $x_1=-1, x_2=3$. W połowie odległości między miejscami zerowymi funkcji kwadratowej, znajduje się pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli. Zatem:

$$p=1$$

Aby znaleźć wzór funkcji f skorzystamy z wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej, czyli:

$$f(x)=a(x-p)^2+q$$

$$f(x)=a(x-1)^2-4$$

Punkt $(-1,0)$ należy do wykresu funkcji f , bo -1 jest miejscem zerowym tej funkcji. Na tej podstawie wyznaczamy współczynnik kierunkowy funkcji f .

$$0=a(-1-1)^2-4$$

$$0=4a-4$$

$$4a=4$$

$$a=1$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$f(x)=(x-1)^2-4$$

Zadanie 7:

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do osi OX pod kątem 30° oraz przechodzi przez punkt $A=(\sqrt{3},4)$.

Rozwiązanie:

$$y=ax+b$$

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy a .

$$a=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$$

Podstawiamy współrzędne punktu $A=(\sqrt{3},4)$ do wzoru prostej.

$$4=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3}+b$$

$$4=1+b$$

$$b=3$$

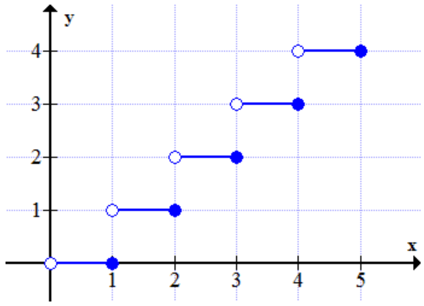
Wzór szukanej prostej to:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$$

Zadanie 8:

Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje największą liczbę całkowitą, mniejszą od tej liczby. Narysuj wykres funkcji f w przedziale $(0,5]$.

Rozwiązanie:



Zadanie 9:

Określ liczbę miejsc zerowych funkcji f .

$$f(x)=\begin{cases} -2x+4, & x<5 \\ x-11, & x\geq 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

1) $x<5$

$$-2x+4=0$$
$$2x=4$$
$$x=2<5$$

$x=2$ znajduje się w przedziale $(-\infty,5)$, więc jest to miejsce zerowe funkcji f .

2) $x\geq 5$

$$x-11=0$$
$$x=11$$

$x=11$ znajduje się w przedziale $[5,+\infty)$, więc jest to miejsce zerowe funkcji f .

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

Zadanie 10:

Wyznacz te wartości parametru p, dla których parabola będąca wykresem funkcji

$$f(x)=-3x^2+\frac{p}{2}x+p-\frac{1}{3}$$

znajduje się pod prostą o równaniu

$$y=(\frac{-p}{2}-2)x+\frac{7}{12}p+3 \quad .$$

Rozwiązanie:

$$-3x^2+\frac{p}{2}x+p-\frac{1}{3}<(\frac{-p}{2}-2)x+\frac{7}{12}p+3$$

Ta nierówność ma być spełniona dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

$$-3x^2+\frac{p}{2}x+(\frac{p}{2}+2)x+p-\frac{7}{12}p-\frac{1}{3}-3<0$$

$$-3x^2+(p+2)x+\frac{5}{12}p-\frac{10}{3}<0$$

Wyróżnik musi być ujemny $\Delta<0$.

$$\Delta=(p+2)^2-4\cdot(-3)\cdot(\frac{5}{12}p-\frac{10}{3})=$$

$$=p^2+4\text{p}+4+12\cdot(\frac{5}{12}p-\frac{10}{3})=$$

$$=p^2+4p+4+5p-40=p^2+9p-36<0$$

$$p^2+9\text{p}-36<0$$

$$\Delta_p=81-4\cdot(-36)=81+144=225$$

$$p_1=\frac{15-9}{2}=3$$

$$p_2=\frac{-15-9}{2}=-12$$

$$p\in(-12,3)$$

Szczegółowe wyjaśnienia zagadnień z działu liczby rzeczywiste, które pomogą Ci w rozwiązaniu powyższych zadań znajdziesz na stronie

http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum

Wszelkie uwagi, komentarze na temat powtórki maturalnej można kierować na adres pytania@matmana6.pl.

Redaktorzy MatmaNa6.pl prowadzą: